

# 基于非局部化方法的边坡稳定性分析

王小平, 封金财

(常州大学 岩土工程研究所, 江苏 常州 213164)

**摘 要:** 应变局部化问题已经成为岩土力学研究的一个重要课题, 边坡的稳定性分析必然要考虑这种应变局部化对边坡的稳定性影响。结合 Bazant 等的非局部化模型方法, 将其推广应用到弹黏塑性本构模型中去, 考虑两种正则化机制的耦合作用, 并采用有限元方法结合滑面应力法对边坡的稳定性进行分析。将数值分析结果与极限平衡法和基于线弹性本构的滑面应力法结果进行了对比, 从分析结果来看文中的计算结果是合理的, 对实际工程具有一定的指导意义。

**关 键 词:** 应变局部化; 非局部化方法; 滑面应力法; 有限元法; 边坡稳定性

**中图分类号:** TU 457

**文献标识码:** A

## Slope stability analysis based on nonlocal method

WANG Xiao-ping, FENG Jin-cai

(Institute of Geotechnical Engineering, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu 213164, China)

**Abstract:** Strain localization is a very important subject in rock and soil mechanics; the influence of strain localization on slope stability must be considered. Considering the combination of two kinds of regularization mechanisms, this paper applied the nonlocal model method to elasto-viscoplastic constitutive model, and carried out slope stability analysis based on finite element slip surface-stress method. The results of limit equilibrium method and slip surface-stress method based on linear elastic model were compared with the results from this paper's method. The results show that the numerical result of this paper is rational and is instructive for engineering application.

**Key words:** strain localization; nonlocal method; slip surface-stress method; finite element method; slope stability

## 1 引 言

应变局部化问题已经成为岩土力学研究的一个重要课题。当岩土材料的变形模式从原先平滑分布的变形模式被一种急剧不连续的变形模式所取代时, 其特征是大量的变形集中到相对狭窄的带状区域内, 这就是材料变形过程中非常典型的应变局部化现象。岩土材料中应变局部化现象的发生直接导致了加载过程中材料强度的降低, 也导致工程岩土体承载力的下降, 因此不考虑这种应变局部化现象对边坡进行稳定性分析是不符实际的。传统的极限平衡法是难以考虑这种应变局部化现象对边坡的稳定性影响的, 有限单元法作为一种相当成熟的数值计算方法, 最近一二十年来被广泛应用于应变局部

化问题的研究。对于应变局部化问题的研究已经取得相当的成果, 主要有Bazant, Deborst, Peerlings等<sup>[1-2]</sup>提出的非局部化模型; DeBorst 和 Sluys<sup>[3]</sup>提出的 Crosserat 连续理论; Pietruszczak<sup>[4]</sup>提出的复合体模型; Ortiz<sup>[5-6]</sup>等提出的弱不连续法; Simo 和 Oliver<sup>[7]</sup>提出的强不连续法。但这些方法理论复杂, 程序难于实现, 目前仍处于理论研究阶段, 所以很难在工程应用中进行推广。Needleman<sup>[8]</sup>的研究指出, 尽管在大多经典连续的本构方程中没有一个特征长度参数, 但对于黏塑性本构模型, 它的本构模型中却隐含了一个内部尺度, 即黏性系数。材料黏性效应的引入同样可减弱数值结果对于网格尺寸的依赖, 得到客观的结果。

实质上, 在应变局部化问题研究中引入正则化

机制主要是降低局部化区域中的应力、应变水平,将应力、应变集中转移到相邻的区域。理论和经验表明,单独考虑一种正则化机制,模型势必具有一定的局限性,不少研究者考虑各种正则化机制的耦合,其中比较简单的方法是考虑黏性效应和其它正则化机制的耦合。本文结合 Bazant 等的非局部化模型方法,将其推广应用到弹黏塑性本构模型中去,并采用有限元方法结合滑面应力法对边坡的稳定性进行分析。

## 2 基于有限元应力场的边坡稳定分析

通过有限元计算的应力场结果内插确定滑动面上的应力,再根据力的平衡确定边坡安全系数。这种方法又称滑面应力法,结合了有限元和极限平衡条分法各自的优点,但它同样需要对滑动面进行假定,对滑动面坡体进行条分如图 1 所示。

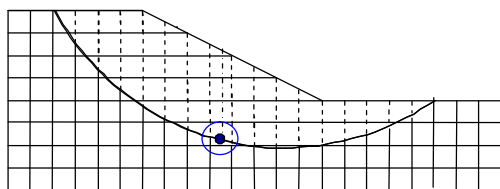


图 1 有限元计算边坡安全系数示意图

Fig.1 Sketch for the calculation of factor of safety by FEM

定义任一滑动面安全系数<sup>[9-12]</sup>为滑动面上抗滑力与滑动力之比:

$$S.F. = \frac{\int_L \tau_r dL}{\int_L \tau_m dL} \approx \frac{\sum S_r}{\sum S_m} \quad (1)$$

式中:  $\tau_r$  为滑动面抗剪力;  $\tau_m$  为条块底部中心滑动剪应力;  $S_r$  为抗滑力;  $S_m$  为滑动力。

每个条块的抗滑力  $S_r$  由条块底部中心抗剪强度乘以条块底部长度得到:

$$S_r = s'l' = (c + \sigma_n \tan \varphi)l' \quad (2)$$

式中:  $l'$  为条块底部长度;  $c$  为黏聚力;  $\sigma_n$  条块底部中心法向应力;  $\varphi$  为内摩擦角。

滑动力可由式 (3) 求得

$$S_m = \tau_m l' \quad (3)$$

对于条块底部中心法向应力  $\sigma_n$  和滑动剪应力  $\tau_m$  的计算步骤如下: ①进行有限元分析得出每个单元形心点应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ 。②利用单元形心点应力插值获得任一个条块底部中心点的应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ 。③求条块底部中心法向应力  $\sigma_n$  和滑动剪应力  $\tau_m$ , 应力张量变换计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_m &= \tau_{xy} \cos(2\theta) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  为条块底部中心应力值;  $\theta$  为条块底部线与水平方向夹角。

对于任意滑动面就可以利用 (1) 式计算其相应的安全系数。对所有假定的滑动面进行计算,取最小的安全系数作为边坡的安全系数。

## 3 非局部化方法基本概念

非局部化方法的一个主要思想是对局部变量进行特征长度或特征体积内的加权平均,可进行加权平均的局部变量包括:应变张量、损伤变量、硬化软化参数等。以应变张量为例,取

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_V \psi(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \quad (5)$$

式中:  $\bar{\varepsilon}(x)$  为非局部应变;  $\varepsilon(\xi)$  为局部应变;  $\psi$  为一衰减函数。

在无限大各向同性体中,可以假设衰减函数只与两质点之间的距离相关:

$$\psi(x, \xi) = \psi_\infty(|x - \xi|) \quad (6)$$

且衰减函数满足:

$$\int_{V_\infty} \psi_\infty(|x - \xi|) d\xi = 1 \quad (7)$$

称之为归一化条件,  $V_\infty$  为整个欧几里德空间域,只有这样常应变场经式 (5) 处理才能保持为一常应变场:

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_{V_\infty} \psi_\infty(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi = \varepsilon_0 \int_{V_\infty} \psi_\infty(x, \xi) d\xi = \varepsilon_0 \quad (8)$$

衰减函数又称非局部权函数,一般采用高斯函数形式:

$$\psi(\rho) = \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2l^2}\right) \quad (9)$$

式中:  $l$  为材料特征长度,高斯函数有一个无界支集,也就是说非局部化相互作用发生在任意长程范围内,但在实际计算过程中,由于高斯函数的权值分布随着  $r/l$  迅速衰减,因此可只截取有限半径作为非局部化平均区域。

对于空间问题,与材料特征长度对应一个空间特征体积  $V_l$ ,非局部化变量就是通过局部变量在特征体积内加权平均得到,空间特征体积  $V_l$  示意图如图 2 所示。

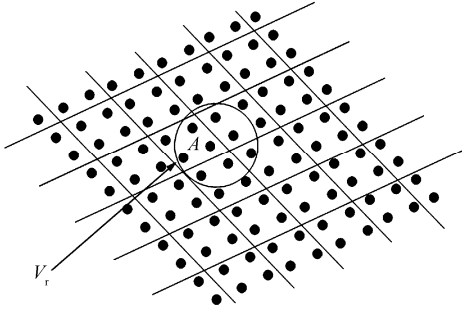


图 2 空间  $V_r$  示意图  
Fig.2 Sketch of space  $V_r$

#### 4 弹黏塑性本构模型

对于 Bingham 弹黏塑性模型<sup>[13]</sup>，如果采用欧拉时间积分法，其应力-应变关系为如下形式：

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \left( \{\Delta\varepsilon\} - \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \Delta t \right) \quad (10)$$

式中： $[D]$ 为弹性矩阵； $\Delta t$ 为时间步长； $\dot{\varepsilon}^{vp}$ 为黏塑性应变率。

在弹性阶段 $\dot{\varepsilon}^{vp} = 0$ ，应力-应变关系由广义虎克定律确定；黏塑性阶段黏塑性应变率通常定义为

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (11)$$

式中： $\eta$ 为黏性系数； $F$ 为屈服函数； $Q$ 为黏塑性势， $\langle \rangle$ 为开关算符，当 $f \leq 0$ 时， $\langle f \rangle = 0$ ；当 $f > 0$ 时， $\langle f \rangle = f$ ， $f$ 为任意函数。

一般采用关联流动准则， $F = Q$ ，函数 $\phi$ 可取如下任一形式：

$$\left. \begin{aligned} \phi(F) &= \exp \left[ M \left( \frac{F - F_0}{F_0} \right) \right] - 1 \\ \phi(F) &= \left( \frac{F - F_0}{F_0} \right)^N \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

屈服函数采用岩土材料中常用的摩尔-库仑屈服函数：

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (13)$$

有限元数值计算经验表明，与弹塑性方法相比，弹黏塑性方法具有更高的计算精度，且数值计算稳定性也较好。尤其是在临近整体破坏阶段，用弹塑性方法计算的荷载位移曲线往往出现跳跃现象，不够光滑，应力分布也呈现明显的混沌状态，而用弹-黏塑性方法计算的荷载位移曲线是光滑的，应力分布也较弹塑性方法合理。

#### 5 非局部化弹黏塑性有限元方法

弹黏塑性有限元分析过程可参看相关文献<sup>[13]</sup>，本文对黏塑性应变增量进行非局部化处理，则在 $t_n$ 时步初始，已知 $u_n$ 、 $F_n$ 、 $\varepsilon_{vp,n}$ 、 $\sigma_n$ 、 $\varepsilon_n$ 、 $\Delta R_n$ ，整个时步的计算步骤如下：

$$\textcircled{1} K_{T,n} = \sum_e \int_V B_n^T D_n B_n dV \quad (14)$$

$$\textcircled{2} \dot{\varepsilon}_{vp,n} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (15)$$

$$\textcircled{3} \Delta \varepsilon_{vp,n} = \Delta t_n \dot{\varepsilon}_{vp,n} \quad (16)$$

$$\textcircled{4} \overline{\Delta \varepsilon}_{vp,n} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \psi(r) \Delta \varepsilon_{vp,n}(x, r) dV_0(r) \quad (17)$$

$$\textcircled{5} \Delta u_n = [K_{T,n}]^{-1} \Delta R_n \quad (18)$$

$$\textcircled{6} \Delta \sigma_n = D_n \Delta \varepsilon_{e,n} = D_n (\Delta \varepsilon_n - \overline{\Delta \varepsilon}_{vp,n}) \quad (19)$$

$$\textcircled{7} u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma_n \quad (20)$$

$$\textcircled{8} \psi_{n+1} = \sum_e \int_V B_{n+1}^T \sigma_{n+1} dV + F_{n+1} \quad (21)$$

$$\textcircled{9} \Delta R_{n+1} = \sum_e \int_V B_{n+1}^T D_{n+1} \dot{\varepsilon}_{vp,n+1} \Delta t_{n+1} dV + \Delta F_{n+1} + \psi_{n+1} \quad (22)$$

⑩校核

$$\left( \Delta t_n \sum_{\text{ALL}} \tilde{\varepsilon}_{vp,n} / \Delta t_1 \sum_{\text{ALL}} \tilde{\varepsilon}_{vp,1} \right) \times 100 \leq \text{TOL} \quad (23)$$

基于上文的非局部弹黏塑性方法，本文利用 Fortran 90 语言进行了非局部化弹黏塑性有限元程序设计，其程序框图如图 1 所示。

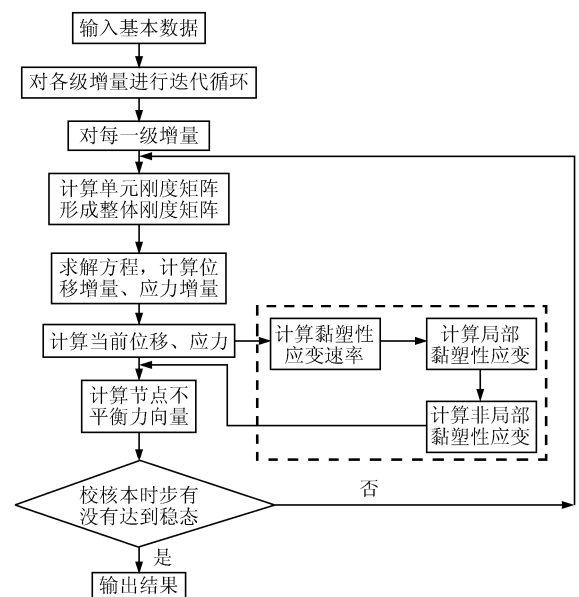


图 3 非局部弹黏塑性有限元程序设计框图  
Fig.3 Program flow chart of nonlocal elastoviscoplastic FEM

## 6 算例分析

如图 4 所示一土坡, 坡高 10 m, 坡角为 45°, 边坡土体由 3 层土体组成, 中间 1 层土的强度较上下 2 层土的强度弱, 材料参数如表 1 所列。计算模型屈服准则采用摩尔-库仑屈服准则, 有限元模型底边长 40 m, 右边高 20 m, 网格采用 1 326 个单元, 4 117 个节点, 模型边界条件: 左右边界限制水平方向位移, 下部边界采用固定边界。

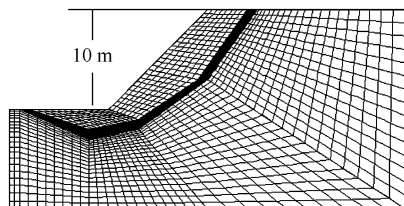


图 4 土坡有限元计算网格  
Fig.4 FEM computation grid of soil slope

表 1 边坡土体的非局部弹黏塑性模型参数  
Table 1 Parameters of nonlocal elasto-viscoplastic model of soil slope

| 土层   | $E$<br>/GPa | 泊松比<br>$\nu$ | $\rho$<br>/(kg/m <sup>3</sup> ) | $c$<br>/kPa | $\phi$<br>/(°) | $l$<br>/m | $\eta$<br>/(GPa·s) |
|------|-------------|--------------|---------------------------------|-------------|----------------|-----------|--------------------|
| 上部土层 | 12          | 0.30         | 2 000                           | 6.0         | 32             | 0.16      | 0.20               |
| 软弱夹层 | 10          | 0.35         | 2 000                           | 4.0         | 25             | 0.16      | 0.25               |
| 下部土层 | 12          | 0.30         | 2 200                           | 6.0         | 32             | 0.16      | 0.20               |

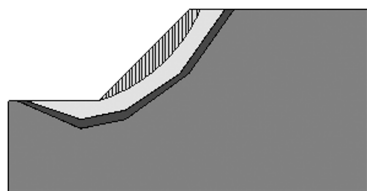


图 5 极限平衡法最危险滑动面  
Fig.5 Critical slip surface by limit equilibrium method

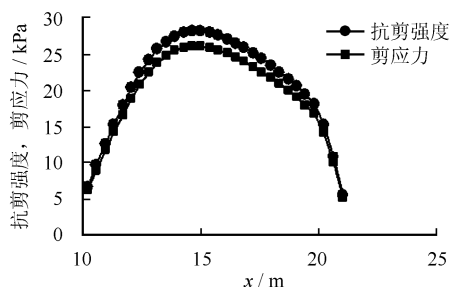


图 6 滑动面上抗剪强度及剪应力分布  
Fig.6 Shear strength and shear stress distribution along critical slip surface

为比较, 首先对边坡进行常规的极限平衡分析, 采用 Morgenstern-Price 方法, 搜索到如图 5 所示的最危险滑动面, 其安全系数为 1.078。滑动面上

抗剪强度和实际剪应力分布如图 6 所示, 整体上滑动面上抗剪强度与实际剪应力比较接近, 在滑动面中部, 抗剪强度稍高于实际剪应力。

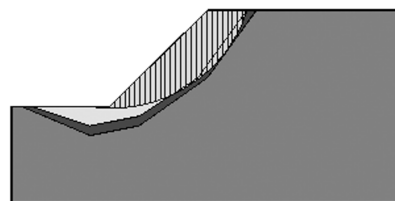


图 7 弹性有限元法最危险滑动面  
Fig.7 Critical slip surface by elastic finite element method

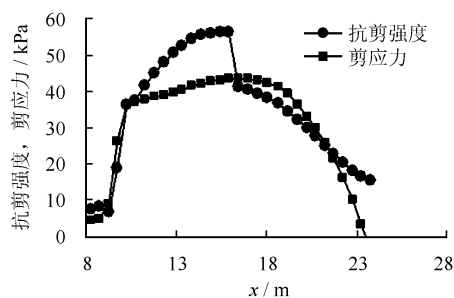


图 8 滑动面上抗剪强度及剪应力分布  
Fig.8 Shear strength and shear stress distribution along critical slip surface

基于线弹性有限元计算的应力场, 采用前面提出的方法进行边坡安全系数计算, 最危险滑动面的搜索过程采用 Geo-Slope 接口程序进行 2 次开发, 搜索到的最危险滑动面如图 7 所示, 其安全系数为 1.160。最危险滑动面上的抗剪强度和剪应力分布如图 8 所示, 在滑动面穿过软弱夹层部分滑动面上抗剪强度低于作用在滑动面上的剪应力。如果采用考虑塑性的本构模型, 在该区域应力必然重新分布, 所以采用线弹性模型计算的应力场对边坡进行稳定性分析是不合理的。

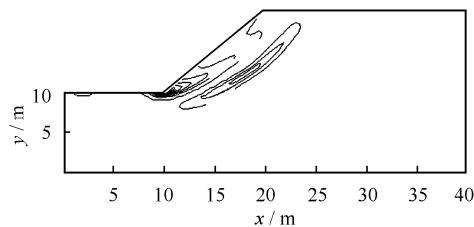


图 9 等效黏塑性应变分布  
Fig.9 Equivalent viscoplastic strain distribution diagram

采用非局部弹黏塑性有限元方法分析得到稳态时的等效黏塑性应变场分布如图 9 所示。从应变场的分布来看, 边坡坡角及软弱层内部发生了应变局部化, 该区域内部应力发生了松弛效应。从位移场的分布如图 10~11 所示, 可以分析出同样的结

论。这种由于应变局部化引起的应力调整对于基于有限元应力场的边坡稳定性分析结果必然有影响。

利用求得的应力场对边坡进行稳定性分析, 得到最危险滑动面(图 12), 安全系数为 1.109, 与采用极限平衡法相比, 偏于安全。

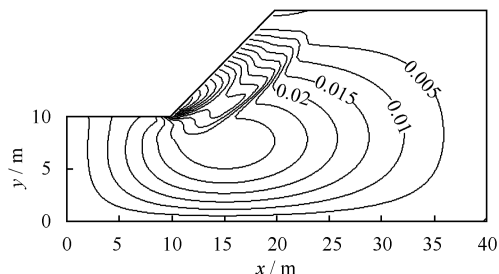


图 10 水平位移等值线(单位: mm)

Fig.10 Isoline of horizontal displacement(unit: mm)

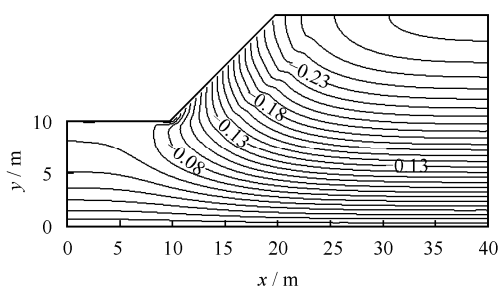


图 11 垂直位移等值线(单位: mm)

Fig.11 Isolines of vertical displacement(unit: mm)

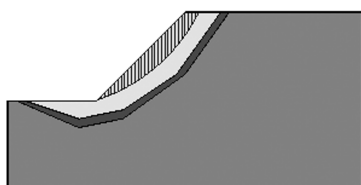


图 12 弹黏塑性有限元法最危险滑动面

Fig.12 Critical slip surface by elasto-viscoplastic finite element method

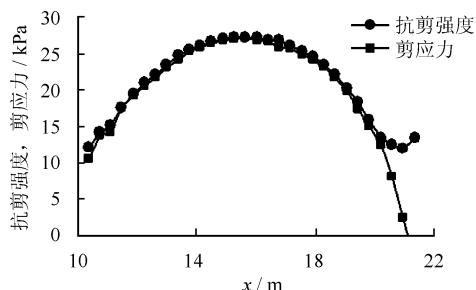


图 13 滑动面上抗剪强度及剪应力分布

Fig.13 Shear strength and shear stress distribution along critical slip surface

由图 12 可以看出, 与采用线弹性本构计算出的最危险滑动面相比, 最危险滑动面的位置在边坡浅层, 不再穿过软弱夹层。滑动面上抗剪强度及剪

应力分布如图 13 所示。由图可以看出, 整个滑动面上抗剪强度均与实际剪应力比较接近, 边坡滑动面后缘位置抗剪强度明显高于实际剪应力。这种分布形式与采用极限平衡方法得到的滑动面上抗剪强度与剪应力分布有所不同, 这主要是由于考虑了应力场调整的影响。

## 7 结 论

(1) 边坡工程中, 由于岩土材料强烈的非均质性、非连续性, 边坡岩土体在各种复杂的工程作用和环境作用下伴随着大量的应变局部化问题, 所以应变局部化对边坡整体稳定性的影响不容忽视, 需要应用一些考虑应变局部化效应的模型和方法进行分析。

(2) 本文将 Bazant 等的非局部化模型方法引入到弹黏塑性本构模型中, 考虑两种正则化机制的耦合, 并采用有限元方法结合滑面应力法将其应用到边坡的稳定性分析中去。比较极限平衡法和采用线弹性方法的分析结果, 本文的计算结果有一定的合理性, 对于实际工程具有一定的指导意义。

(3) 基于有限元应力场的边坡稳定分析方法其计算结果依赖于计算应力场的可靠性, 采用线弹性本构, 不考虑应力场的调整是不合理的。本文虽然只是考虑了自重应力场的作用, 但对于有限元方法来讲, 工程实践中的开挖、渗流、动荷载等作用都可以考虑进去, 这一方面的研究还有待进一步的探讨。

## 参 考 文 献

- [1] BAZANT ZDENEK P, PIJAUDIER-Cabot Gilles. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions, ASME*, 1988, 55(2): 287—293.
- [2] DE Borst R, SLUYS L J. Localization in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 90(1): 805—827.
- [3] DE Borst, MÜHLHAUS H B. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 35: 521—539.
- [4] PIETRUSZCZAK S T, MROH Z. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials[J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1981, 17(3): 327—334.
- [5] WAN R G, CHAN D H. A finite element method for the analysis of shear bands in geomaterials[J]. *Finite*

- Element Analysis and Design**, 1990, 7(2): 129—143.
- [6] ORTIZ M, LEROY Y, NEEDLEMAN A. Finite element method for localization failure analysis[J]. **Computer methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1987, 61(2): 189—214.
- [7] SIMO J C, OLIVER E T. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids[J]. **Computer Mechanics**, 1993, 12: 277—296.
- [8] NEEDLEMAN A. Material rate dependence and mesh sensitivity on localisation problems[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1988, 67: 69—86.
- [9] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [10] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. **Journal of Geotechnical Engineering, American Society of Civil Engineers**, 1996, 122(7): 477—596.
- [11] 曾亚武, 田伟明. 边坡稳定性分析的有限元法与极限平衡法的结合[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(2): 5355—5359.
- ZENG Ya-wu, TIAN Wei-ming. Slope stability analysis by combining FEM with limit equilibrium method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(2): 5355—5359.
- [12] 殷宗泽, 吕擎峰. 圆弧滑动有限元土坡稳定分析[J]. 岩土力学, 2005, 26(10): 1525—1529.
- YIN Zong-ze, LÜ Qing-feng. Finite element analysis of soil slope based on circular slip surface assumption[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(10): 1525—1529.
- [13] OWEN D R J, HIRON E. Finite elements in plasticity: Theory and practice[M]. Swansea: Pineridge Press Ltd., 1980.
- 
- 上接第 140 页
- 工程中的应用[J]. 地下空间与工程学报, 2005, 1(4): 584—586.
- WANG Gui-ping, LI Hua-mei, FEI Yong-cheng, et al. Application of gridding concrete retaining wall in trench engineering[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2005, 1(4): 584—586.
- [5] 贺会团, 赵维炳. 土压力研究问题综述[J]. 水利与建筑工程学报, 2005, 3(4): 10—14.
- HE Hui-tuan, ZHAO Wei-bing. Summarization on study of earth pressure[J]. **Journal of Water Resources and Architectural Engineering**, 2005, 3(4): 10—14.
- [6] 南京水利科学研究所. 土工试验技术手册[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- [7] 钱立平, 马建林. 土工离心模型试验原理与若干问题分析[J]. 路基工程, 2007, (3): 6—8.
- QIAN Li-ping, MA Jian-lin. The principle and several problems' analysis of geotechnical centrifugal model test[J]. **Subgrade Engineering**, 2007, (3): 6—8.
- [8] 周小文, 程展林, 孙常青, 等. 软土地基路堤施工控制的离心模拟试验研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(5): 1253—1263.
- ZHOU Xiao-wen, CHENG Zhan-lin, SUN Chang-qing, et al. Centrifuge modeling construction of road embankment on soft clay ground[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(5): 1253—1256.
- [9] 马险峰, 张海华, 朱卫杰, 等. 超深基坑开挖对超临近高层建筑影响的离心模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(增刊): 499—504.
- MA Xian-fen, ZHANG Hai-hua, ZHU Wei-jie, et al. Centrifugal model tests on effect of excavation super-deep foundation pits on adjacent high-rise buildings[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2008, 30(Supp.): 499—504.
- [10] OVESEN N K. The use of physical models in design: the scaling law relationships[C]//7th European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Brighton: [s. n.], 1979: 318—323.
- [11] MALUSHITSKY Y N. The Centrifuge model testing of waste-heap embankments[M]. London: Cambridge University Press, 1975.
- [12] 姚燕明, 周顺华, 李尧臣. 离心模型试验边界效应分析[J]. 力学季刊, 2004, 25(2): 291—296.
- YAO Yan-ming, ZHOU Shun-hua, LI Yao-chen. Boundary effect analysis of centrifuge test[J]. **Chinese Quarterly of Mechanics**, 2004, 25(2): 291—296.
- [13] 顾行文, 章为民, 徐光明. 离心模型试验中测量土压力的一种新方法[C]//第二届全国非饱和土学术研讨会论文集. 杭州: 浙江大学, 2005: 679—685.
- [14] J.S.贝达特, A.G.皮尔索. 随机数据分析方法[M]. 凌福根译. 北京: 国防工业出版社, 1976.